

BERTRAND'IN KUTU PARADOKSU

Olasılık Yanılgısını Keşfetmek: Oyunlaştırılmış Ders Uygulaması

Sınıf	9-10-11-12 Sınıflar	Süre	40 Dakika
Ders	Matematik, Bilgisayar Bilimi	Araç	Dijital Simülasyon
Konu	Koşullu Olasılık	Yöntem	Oyunlaştırma + Sorgulama

Temel Soru: "Altın para gördüğünde kutudaki diğer paranın da altın olma ihtimali nedir?" Sezgi **%50** der — matematik **%66.7** der. Hangisi doğru?

1. KAZANIMLAR VE ÖĞRENME HEDEFLERİ

Bu dersin sonunda öğrenci;

► BİLGİ

- Koşullu olasılık kavramını tanımlar.
- Örneklem uzayını doğru biçimde oluşturur.
- Bayes Teoremi'nin temel mantığını ifade eder.

► KAVRAMA

- "Kutu mu, para mı örnekleniyor?" sorusunu analiz eder.
- Gözlem seçimi önyargısının ne olduğunu açıklar.
- Sezgisel yanıtın neden yanıltıcı olduğunu gerekçelendirir.

► UYGULAMA

- Simülasyon verilerini okur ve yorumlar.
- Frekans tablosu oluşturarak deneysel olasılık hesaplar.
- Büyük Sayılar Yasası'nı gözlemsel olarak doğrular.

► ANALİZ

- Matematiksel kanıtı adım adım takip eder.
- Sezgi ile matematik arasındaki çelişkiyi çözümler.
- Benzer paradokslara (Monty Hall) bağlantı kurar.

2. DERS AKIŞI — 40 DAKİKA ZAMAN ÇİZELGESİ

AŞAMA	SÜRE	ETKİNLİK	YÖNTEM
1	0–5 dk	Dikkat Çekici Giriş: "Sezgin Güven" Anketi	Bireysel tahmin
2	5–12 dk	Paradoksun Tanıtımı + İlk Oyun Turu	Simülasyon + Tartışma
3	12–20 dk	Yanılgının Keşfi: Neden Yanıldık?	Sorgulama + Analiz
4	20–30 dk	Matematiksel Kanıt: Örneklem Uzayı + Bayes	Doğrudan Öğretim
5	30–37 dk	Simülasyon ile Doğrulama: Büyük Sayılar	Keşif + Veri Analizi
6	37–40 dk	Kapanış: Monty Hall Bağlantısı + Çıkış Bileti	Değerlendirme

3. DETAYLI UYGULAMA REHBERİ

□ 0–5. DAKİKA | AŞAMA 1: DİKKAT ÇEKİCİ GİRİŞ — "SEZGİNE GÜVEN" ANKETİ

🎯 Bu Aşamanın Amacı

Öğrencilerin ön bilgilerini ve sezgilerini ortaya çıkarmak; paradoksla ilk karşılaşmada doğal yanılığını tetiklemek. Öğrenci "yanlış" cevap verecek — **bu planlıdır.**

📁 Öğretmen Adımları

Adım 1.1: Tahtaya veya ekrana şunu yazın:

"Bir kutuda altın para gördüm. Kutudaki diğer paranın da altın olma ihtimali nedir?"

Adım 1.2: Öğrencilere 1 dakika süre verin, kağıda cevaplarını yazsınlar.

→ Seçenekler: **A) 1/3 B) 1/2 C) 2/3 D) Bilmiyorum**

Adım 1.3: El kaldırma ile hızlı yoklama yapın.

→ Beklenen: Sınıfın büyük çoğunluğu (%70–80) "**1/2**" diyecek.

Adım 1.4: Cevapları tahtaya not edin, değerlendirme yapmayın.

→ Söyleyin: "*Dersin sonunda kimin haklı olduğunu birlikte göreceğiz.*"

⚠️ ÖĞRETMEN NOTU — Yanılığın Neden Tetikleniyor?

Öğrenciler "kutu seçimi" perspektifinden düşünür: "*GG kutusu elenmiş, geriye AA ve AG kaldı, dolayısıyla 1/2.*" Bu mantık **yanlıştır** çünkü örnekleme birimi KUTU değil, **PARA**'dır. Bu fark dersin tüm matematiksel özüdür. Sezgisel yanıt (1/2) ile doğru yanıt (2/3) arasındaki bu uçurum "**Gözlem Seçimi Önyargısı**" olarak bilinir.

□ 5–12. DAKİKA | AŞAMA 2: PARADOKSUN TANITIMI + İLK OYUN TURU

🎯 Bu Aşamanın Amacı

Simülasyonu tanıtmak, öğrencilerin bizzat oynamasını sağlamak ve "hissettiğim ile gerçek arasında bir fark var mı?" sorusunu somutlaştırmak.

📁 Öğretmen Adımları

Adım 2.1: Simülasyonu projektörde açın.

→ Teorik panel kapalı tutun — önce oyun deneyimi gelecek.

Adım 2.2: Kuralları 60 saniyede anlatın:

→ 3 kutu var: **AA** (iki altın), **GG** (iki gümüş), **AG** (bir altın bir gümüş). Kutu seçiyorsunuz, sistem bir para çekiyor. Altın çıkarsa tahmin yapıyorsunuz.

Adım 2.3: 3 gönüllü öğrenciyi tahtaya çağırın.

→ Her biri 3'er tur oynasın. Sonuçları tahtaya kaydedin.

Adım 2.4: Sınıfa sorun: *"Kaç turda altın gördünüz? Kaçında diğeri de altındı?"*

→ Küçük örneklemede sonuçlar dağınık olacak — bu normaldir, ilerleyeceğiz.

Adım 2.5: Teorik paneli açın, 3 kutuyu birlikte inceleyin.

→ Sorun: *"Bu 3 kutudan hangisinde altın para daha fazla var?"*

📁 Kutu İçerikleri Özet

KUTU	PARA 1	PARA 2	ALTIN SAYISI
Kutu 1 (AA)	<input type="checkbox"/> Altın (A ₁)	<input type="checkbox"/> Altın (A ₂)	2 / 2
Kutu 2 (GG)	<input type="radio"/> Gümüş (G ₁)	<input type="radio"/> Gümüş (G ₂)	0 / 2
Kutu 3 (AG)	<input type="checkbox"/> Altın (A ₃)	<input type="radio"/> Gümüş (G ₃)	1 / 2

🕒 12–20. DAKİKA | AŞAMA 3: YANILGININ KEŞFİ — NEDEN YANILIYORUZ?

🎯 Bu Aşamanın Amacı

Öğrencilerin "1/2" yanıtının neden yanlış olduğunu **kendi sorgulamaları** ile keşfetmesi. Öğretmen cevabı vermez — **doğru soruları sorar.**

🔍 Sorgulama Soruları

? **Soru 1:** Altın para çektiğinizde hangi kutularda olabilirsiniz?

💡 *Beklenen: "AA veya AG" — Bu doğru ama eksik bir analiz.*

? **Soru 2:** AA kutusundan altın çekmenin kaç farklı yolu var?

💡 *Beklenen: "2 yol" (A_1 veya A_2). **Burası kritik!***

? **Soru 3:** AG kutusundan altın çekmenin kaç farklı yolu var?

💡 *Beklenen: "1 yol" (sadece A_3). **Asimetri ortaya çıkıyor!***

? **Soru 4:** "Altın gördüm" dediğimde toplam kaç senaryo mümkün?

💡 *Beklenen: "3 senaryo: A_1, A_2, A_3 "*

? **Soru 5:** Bu 3 senaryonun kaçında diğer para da altın?

💡 *Beklenen: "2'sinde (A_1 ve A_2 senaryoları)" → **$P = 2/3$!***

🚫 YANILGININ KÖKENİ — Neden Herkes 1/2 Diyor?

1/2 diyen öğrenci şöyle düşünür: *"GG kutusu elenmiş → geriye AA ve AG kaldı → iki ihtimal → 1/2"*

Bu düşüncenin **HATASI:** Kutuları eşit ağırlıkla saymak.

AA kutusundan altın çekmek, AG kutusundan altın çekmekten 2 KAT DAHA KOLAY! Çünkü AA'da 2 altın para var, AG'de sadece 1 altın para var.

Doğru analiz birimi **KUTU değil, PARA'dır.** Her para eşit olasılıkla çekilir → 6 eşit olasılıklı para → 3 altın → **2/3**

☐ 20–30. DAKİKA | AŞAMA 4: MATEMATİKSEL KANIT

🎯 Bu Aşamanın Amacı

Sezgisel keşfin ardından formal matematiksel kanıtı sunmak. İki yöntem gösterilir: **(1) Örneklem uzayı sayımı, (2) Bayes Teoremi.**

YÖNTEM 1: Örneklem Uzayı Sayımı (9. Sınıf Düzeyi)

Tüm olası senaryoları listeleysin:

SENARYO	ÇEKİLEN PARA	KUTU	DİĞERİ	GEÇERLİ?
1	<input type="checkbox"/> A ₁ (Altın)	AA	<input type="checkbox"/> Altın	✓ GEÇERLİ
2	<input type="checkbox"/> A ₂ (Altın)	AA	<input type="checkbox"/> Altın	✓ GEÇERLİ
3	<input type="radio"/> G ₁ (Gümüş)	GG	<input type="radio"/> Gümüş	✗ Elendi
4	<input type="radio"/> G ₂ (Gümüş)	GG	<input type="radio"/> Gümüş	✗ Elendi
5	<input type="checkbox"/> A ₃ (Altın)	AG	<input type="radio"/> Gümüş	✓ GEÇERLİ
6	<input type="radio"/> G ₃ (Gümüş)	AG	<input type="checkbox"/> Altın	✗ Elendi

Altın görüldüğünde → 3 geçerli senaryo, 2'sinde diğeri altın → P = 2/3

YÖNTEM 2: Bayes Teoremi (Adım Adım)

Adım B1 — Olayları tanımla:

A = "Seçilen kutunun AA olması"

B = "Çekilen paranın altın olması"

Adım B2 — Bilinenleri yaz:

$P(AA) = 1/3$ | $P(GG) = 1/3$ | $P(AG) = 1/3$

Adım B3 — Koşullu olasılıkları belirle:

$P(\text{Altın} | AA) = 2/2 = 1$

$P(\text{Altın} | GG) = 0/2 = 0$

$P(\text{Altın} | AG) = 1/2$

Adım B4 — Toplam olasılık teoremi ile P(Altın) hesapla:

$$P(\text{Altın}) = P(\text{Altın}|AA) \cdot P(AA) + P(\text{Altın}|GG) \cdot P(GG) + P(\text{Altın}|AG) \cdot P(AG)$$
$$= 1 \cdot (1/3) + 0 \cdot (1/3) + (1/2) \cdot (1/3)$$
$$= 1/3 + 0 + 1/6 = 1/2$$

Adım B5 — Bayes formülünü uygula:

$$\begin{aligned} P(AA \mid \text{Altın}) &= \frac{P(\text{Altın} \mid AA) \cdot P(AA)}{P(\text{Altın})} \\ &= \frac{1 \cdot (1/3)}{(1/2)} \\ &= (1/3) / (1/2) = 2/3 \quad \checkmark \end{aligned}$$

✓ MATEMATİKSEL SONUÇ

$$P(\text{Diğer para da altın} \mid \text{Altın gördüm}) = 2/3 \approx \%66.7$$

Bu sonuç hem örneklem uzayı sayımı hem de Bayes Teoremi ile doğrulanmıştır. Sezgi neden yanılıyor? Çünkü AA kutusunun altın para gösterme olasılığı, AG kutusununkinin tam **2 KATI**'dir. Sezgi bu asimetriyi görmezden gelir.

□ 30–37. DAKİKA | AŞAMA 5: SİMÜLASYON İLE DOĞRULAMA

🎯 Bu Aşamanın Amacı

Büyük Sayılar Yasası'nı gözlemsel olarak deneyimlemek. Simülasyonun otomatik modunu kullanarak deneysel oran ile teorik oranın birbirine yaklaştığını görmek.

📁 Öğretmen Adımları

Adım 5.1: Simülasyonun istatistik panelini gösterin.

→ Sıfırla butonuna basın, herkes temiz başlasın.

Adım 5.2: Normal hızda 10 tur çalıştırın.

→ Sorun: "*Oran 2/3'e yakın mı?*" — Küçük örneklemde sapma olabilir, normaldir.

Adım 5.3: Hızlı moda geçin, 100 tur çalıştırın.

→ Sorun: "*Şimdi ne görüyorsunuz?*" — Oran %66.7'ye yaklaşmaya başlar.

Adım 5.4: 1000 tur çalıştırın.

→ Beklenen: Oran %64–%69 aralığında. Teorik değer %66.7.

Adım 5.5: Sorun: "*Neden daha fazla tur attıkça sonuç %66.7'ye yaklaşıyor?*"

→ Bu Büyük Sayılar Yasası'nın sezgisel açıklamasına kapı aralar.

📈 BÜYÜK SAYILAR YASASI — Öğrenciye Açıklama

Tek bir deney şansa bağlıdır. Ama çok sayıda deney yapıldığında, sonuçların ortalaması teorik olasılığa yaklaşır.

- **10 tur:** Sonuç %40 ile %90 arasında olabilir (*şans yüksek etkili*)
- **100 tur:** Sonuç %58 ile %75 arasında olur (*şans etkisi azalır*)
- **1000 tur:** Sonuç %64 ile %69 arasında olur (*teorik değere yaklaşır*)

Bu yasa, sigortacılık, finans ve istatistiğin temel taşıdır.

📊 Öğrenci Veri Kayıt Tablosu (Tahtaya Çizin)

TUR SAYISI	ALTIN GÖRÜLDÜ	DİĞERİ ALTIN	ORAN (%)	TEORİK (%)
10	—	—	—	%66.7
50	—	—	—	%66.7
100	—	—	—	%66.7
1000	—	—	—	%66.7

📅 37–40. DAKİKA | AŞAMA 6: KAPANIŞ + ÇIKIŞ BİLETİ

🎯 Bu Aşamanın Amacı

Öğrenilenleri pekiştirmek, Monty Hall bağlantısını kurmak ve öğrencinin kavramsal dönüşümünü ölçmek.

📁 Öğretmen Adımları

Adım 6.1: Dersin başındaki ankete geri dönün.

→ "Şimdi aynı soruya ne cevap verirdiniz?" — El kaldırma ile tekrar yoklama.

Adım 6.2: Monty Hall Paradoksu'nu 1 dakikada tanıtın.

→ "3 kapı, 1 araba, 2 keçi. Kapı açıldıktan sonra değişmeli mi?" — Aynı mantık!

Adım 6.3: Çıkış biletini dağıtın. 3 dakika süre verin.

→ Toplanan biletleri hızlıca gözden geçirin — bir sonraki derse veri sağlar.

Adım 6.4: Kapanış cümlesi:

→ *"Matematik sezgimizi düzeltir. Bugün gördüğümüz şey: Doğru soru sormak, doğru cevabı bulmaktan daha önemlidir."*

4. ÇIKIŞ BİLETİ — ÖĞRENCİ DEĞERLENDİRME FORMU

Ad Soyad: _____ **Tarih:** _____

SORU 1: Bertrand Paradoksunda doğru yanıt nedir? Neden?

Cevap: _____

SORU 2: Neden çoğu insan $1/2$ yanılıgısına düşüyor? Açıklayın.

Cevap: _____

SORU 3: Simülasyonda 1000 tur sonunda oran %66.7'ye yaklaştı. Bu hangi matematiksel yasayla açıklanır?

Cevap: _____

SORU 4: Monty Hall Paradoksu ile bu paradoks arasındaki benzerlik nedir?

Cevap: _____

Bugün en çok şaşırdığım şey: _____

5. FARKLILAŞTIRMA VE UYARLAMA ÖNERİLERİ

Hazır Bulunuşluğu Düşük Öğrenciler

- Simülasyonu sadece izleyerek takip etsinler.
- Örneklem uzayı tablosunu önceden yazılı olarak verin.
- Sadece Yöntem 1 (sayım) üzerinde durun, Bayes atlanabilir.
- Somut nesne kullanın: 3 kutu, 6 renkli top.

Hazır Bulunuşluğu Yüksek Öğrenciler

- Bayes Teoremini formül düzeyinde yazdırın.
- Monty Hall problemini matematiksel olarak çözünüz.
- "Kaç tur sonra %66'ya ulaşılır?" sorusunu araştırın.

Görsel Öğrenenler

- Örneklem uzayını ağaç diyagramı olarak gösterin.
- Tur sayısı – oran grafiği çizdirin.

Teknoloji Kısıtlı Ortam

- Simülasyon yerine gerçek kutu + renkli boncuk kullanın.
 - 30 tur fiziksel deney yapıp sınıf verilerini birleştirin.
-
-

6. DEĞERLENDİRME RUBRİK

KRİTER	MÜKEMMEL (4)	YETERLİ (2-3)	GELİŞECEK (0-1)
Doğru Yanıt	2/3 der ve gerekçeler	2/3 der, kısmi açıklama	1/2 der veya bilmez
Yanılı Açıklama	Örnekleme birimini doğru belirtir	Kısmi açıklama yapar	Açıklayamaz
Bayes Uygulaması	Formülü doğru uygular	Adımlar eksik ama mantık doğru	Formülü bilmez
Simülasyon Yorumu	BSY'yi bağlar, veriyi okur	Veriyi okur, yorum eksik	Veriyi okuyamaz

7. ÖĞRETMEN HAZIRLIK LİSTESİ

Ders Öncesi Kontrol:

- Simülasyon dosyası (bertrand-paradox.html) bilgisayarda açık ve test edilmiş
- Projektör / akıllı tahta çalışıyor
- Çıkış bileti fotokopileri hazır (öğrenci sayısı kadar)
- Tahtada boş alan var (tablo için)
- Yedek plan: Gerçek kutu + renkli boncuklar hazır

Tahmini Süre Dağılımı:

Aşama	Standart	Kesilebilir
Aşama 1 (Anket)	5 dk	3 dk
Aşama 2 (Oyun)	7 dk	5 dk
Aşama 3 (Keşif)	8 dk	Kesilemez!

Aşama	Standart	Kesilebilir
Aşama 4 (Kanıt)	10 dk	7 dk
Aşama 5 (Simülasyon)	7 dk	5 dk
Aşama 6 (Kapanış)	3 dk	Kesilemez!

Sıkça Karşılaşılan Durumlar:

⚠️ **Durum 1:** Öğrenci "ama 2 kutu kaldı, 1/2 olmalı" diye ısrar ederse: Sorun: "Kutu mu seçiyoruz, para mı çekiyoruz?" Odağı paraya çevirin.

⚠️ **Durum 2:** Simülasyon 10 turda %50 gösterirse: Söyleyin: "Bu şansa bağlı. Daha fazla tur atalım." Küçük örneklem normaldir.

⚠️ **Durum 3:** Bayes formülü çok karmaşık gelirse: Yöntem 1 (sayım) yeterlidir. Bayes ek zenginleştirme olarak sunun.

⚠️ **Durum 4:** Öğrenci Monty Hall ile karıştırırsa: "Aynı mantık, farklı kostüm" deyin. İkisi de örnekleme asimetrisine dayanır.

8. KAYNAKÇA

- Bertrand, J. (1889). *Calcul des probabilités*. Gauthier-Villars, Paris.
- Falk, R. (1992). A closer look at the probabilities of the notorious three prisoners. *Cognition*, 43(3), 197–223.
- Kahneman, D. (2011). *Thinking, Fast and Slow*. Farrar, Straus and Giroux.
- MEB (2018). *Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı (9–12. Sınıflar)*. Ankara.
- Wikipedia: Bertrand box paradox — https://en.wikipedia.org/wiki/Bertrand_box_paradox